

# **BINTIK CATU**

**Liek Wilardjo**

Program Studi Teknik Elektro, Fakultas Teknik Elektronika dan Komputer – UKSW  
Jalan Diponegoro 52-60, Salatiga 50711

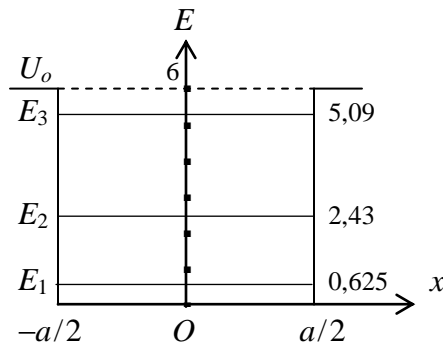
## **ABSTRACT**

One-dimensional square potential well is used as a model for quantum dots. Its Schrodinger's equations and their solutions — both eigenstates and eigenenergies — for the lowest three levels are explained qualitatively and derived mathematically.

## **1. PENGANTAR**

*University Physics* susunan Young dan Freedman (2008) dinyatakan oleh penerbitnya sebagai buku teks laris nomor wahid. Pernyataan itu tidak berlebihan, sebab sebagai buku teks Fisika untuk mahasiswa S-1 bertahana "tama" (*freshman*) dan "muda" (*sophomore*), buku Y & F itu memang komprehensif, ringkas, bernas, dan jelas. Penjelasannya diberikan baik secara kuantitatif-matematis, maupun secara kualitatif-konseptual. Contoh-contoh soalnya diselesaikan dengan lebih dulu menegaskan apa-apa yang diketahui dan menggariskan siasat yang hendak ditempuh.

Tetapi karena terlalu tajam (*succint*)nya, ada bagian-bagian yang rincian penurunan matematis (dan/atau grafis)nya tidak diberikan, misalnya pada pokok bahasan potensial sumur persegi (*square-well potential*) dengan potensial yang anta (*finite*) [Y & F, p. 1382-3].



Gambar 1 :  $U_0 = 6E_\infty$

Artikel ini mengisi bagian yang rumpang itu. Untuk memudahkan mencari eigentenerganya secara matematis-grafis, kita mengikuti Eisberg (1961) dengan menggeser sumbu ordinat (tenaga, dalam  $U_0/E_\infty$ , di Gb.1) ke tengah, sehingga dinding kiri dan kanan sumur itu setangkup terhadap sumbu tersebut. Di sini  $U_0$  ialah tenaga potensial, sedang  $E = \pi^2 \hbar^2 / 2ma^2$  ialah tenaga dasar zarah di dalam kotak. Lebar sumur itu, yang dalam Y & F dinamai  $L$ , di sini dinyatakan dengan  $a$ , sehingga dinding-dinding kiri dan kanan sumur itu posisinya berturut-turut di  $x = -\frac{1}{2}a$  dan  $x = +\frac{1}{2}a$ , di sumbu absisa.

Untuk  $U_0 = 6 E_\infty$ , Y & F memberikan ketiga aras tenaga yang terendah, yakni — dalam  $E_\infty$  —  $E_1 = 0,635$ ,  $E_2 = 2,43$ , dan  $E_3 = 5,09$  (Gambar 1).

## 2. PERSAMAAN SCHROEDINGER DAN EIGENKEADAAN

Kalau  $\mathbf{H}$  ialah pengandar (*operator*) Hamilton,  $\psi$  ialah eigenfungsi atau eigenkeadaan, dan  $E$  ialah eigentenaga, persamaan Schroedinger kita tulis:

$$\mathbf{H}\psi = E\psi.$$

Untuk soal ekamatra,  $\mathbf{H} = \mathbf{P}^2/2m = \frac{\hbar}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$ , dan eigenfungsinya  $\psi(x)$ . Maka di

kiri dan kanan sumur:

$$(1) \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - E)\psi = 0 ; \quad x \leq -\frac{1}{2}a; \quad x \geq \frac{1}{2}a$$

sedang di dalam sumur

$$(2) \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0 ; \quad -\frac{1}{2}a \leq x \leq \frac{1}{2}a$$

Penyelesaian persamaan (2) ialah fungsi sinusoida:

$$(3) \quad \psi_M = A \sin k_1 x + B \cos k_1 x; \quad -1a \leq x \leq 1a$$

dengan

$$(4) \quad k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar,$$

sedang penyelesaian persamaan (1) ialah fungsi eksponensial :

$$(5) \quad \psi_L = C e^{k_2 x} + G e^{-k_2 x}, \quad x \leq -1a$$

dan

$$(6) \quad \psi_R = F e^{k_2 x} + D e^{-k_2 x}, \quad x \geq 1a$$

dengan

$$(7) \quad k_2 = \sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar$$

Indeks  $L$ ,  $M$ , dan  $R$  pada  $\psi$  berturut-turut menandai daerah kiri, tengah, dan kanan, dengan dinding-dinding di  $x = \mp 1a$  sebagai batasnya.

Bahwa (3), (5), dan (6) secara matematis benar, mudah diverifikasi dengan memasukkannya ke dalam persamaan diferensialnya masing-masing. Tetapi secara fisis penyelesaian-penyelesaian itu harus tetap ada bila  $x \rightarrow \pm \infty$  pun! Karena itu haruslah  $F = G = 0$ , sehingga

$$(5.a) \quad \psi_L = C e^{k_2 x}; \quad x \leq -1a$$

dan

$$(6.a) \quad \psi_R = D e^{-k_2 x}, \quad x \geq 1a$$

Penyelesaian-penyelesaian (3), (5.a), dan (6.a) dan turunan pertamanya juga harus malar (*continuous*) di batas-batas daerah. Tegaknya,

$$\begin{aligned} \psi_L \Big|_{x=-\frac{1}{2}a} &= \psi_M \Big|_{x=-\frac{1}{2}a}, & \psi'_L \Big|_{x=-\frac{1}{2}a} &= \psi'_M \Big|_{x=-\frac{1}{2}a} \\ \psi_M \Big|_{x=-\frac{1}{2}a} &= \psi_R \Big|_{x=-\frac{1}{2}a}, & \psi'_M \Big|_{x=-\frac{1}{2}a} &= \psi'_R \Big|_{x=-\frac{1}{2}a} \end{aligned}$$

sehingga berturut-turut kita dapatkan persamaan-persamaan syarat batas,

$$(8) \quad C e^{-(k_2 a/2)} = -A \sin(k_1 a/2) + B \cos(k_1 a/2)$$

$$(9) \quad k_2 C e^{-(k_2 a/2)} = k_1 [A \cos(k_1 a/2) + B \sin(k_1 a/2)]$$

$$(10) \quad A \sin(k_1 a/2) + B \cos(k_1 a/2) = D e^{-(k_2 a/2)}$$

$$(11) \quad k_1 [A \cos(k_1 a/2) - B \sin(k_1 a/2)] = -k_2 D e^{-(k_2 a/2)}$$

yang dapat diselesaikan secara simultan.

Dari (10) – (8) kita peroleh

$$(12) \quad (D - C) e^{-(k_2 a/2)} = 2A \sin(k_1 a/2)$$

dan dari (10) + (8) :

$$(13) \quad (D + C) e^{-(k_2 a/2)} = 2B \cos(k_1 a/2) ,$$

sedang dari (9) – (11) kita dapatkan

$$(14) \quad k_2 (D + C) e^{-(k_2 a/2)} = 2k_1 B \sin(k_1 a/2) ,$$

dan dari (9) + (11) :

$$(15) \quad -k_2 (D - C) e^{-(k_2 a/2)} = 2k_1 \cos(k_1 a/2) .$$

Asalkan  $B \neq 0$  dan  $(D + C) \neq 0$  , (14) dapat dibagi dengan (13), dan hasilnya ialah

$$(16) \quad k_2 = k_1 \tan(k_1 a/2) .$$

Asalkan  $A \neq 0$  dan  $(D - C) \neq 0$  , (15) dapat dibagi dengan (12). dan hasilnya ialah

$$(17) \quad -k_2 = k_1 \cot(k_1 a/2) .$$

Dengan *reductio ad absurdum* (yang juga disebut *reductio ad impossibile*), dapat dibuktikan bahwa (16) dan (17) tidak dapat dipenuhi kedua-keduanya secara bersama, sebab — seandainya bisa — maka (16) + (17) akan memberikan :

$$0 = k_1 \{ \tan(k_1 a/2) + \cot(k_1 a/2) \}$$

Kalikanlah ini dengan  $\tan(k_1 a/2)$ , maka hasilnya ialah :

$$0 = k_1 \{ \tan^2(k_1 a/2) + 1 \}$$

atau

$$\tan^2(k_1 a/2) = -1$$

yang "absurd" atau mustahil, sebab  $k_1$  dan  $a$  kedua-keduanya nyata.

Jadi, penyelesaian persamaan Schroedinger (1) dan (2) terpilah ke dalam dua kategori.

Kategori 1 :  $k_1 \tan(k_1 a/2) = k_2, A = 0, (D - C) = 0$

sehingga (10) menjadi  $B \cos(k_1 a/2) = D e^{-(k_2 a/2)}$

atau  $D = B \cos(k_1 a/2) e^{(k_2 a/2)} = C$

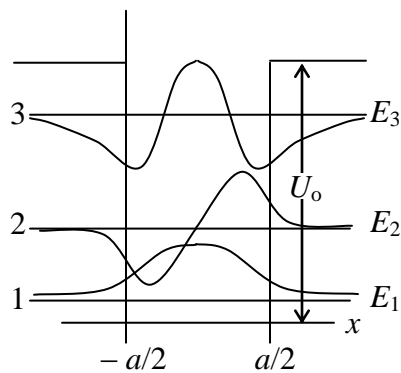
dan (3), (5.a) dan (6.a) menjadi:

$$(18) \quad \psi(x) = \begin{cases} B \cos(k_1 a/2) e^{(k_2 a/2)} e^{(k_2 x)}, & x \leq -a/2 \\ B \cos(k_1 x), & -a/2 \leq x \leq a/2 \\ B \cos(k_1 a/2) e^{(k_2 a/2)} e^{-(k_2 x)}, & x \geq a/2 \end{cases}$$

Kategori 2:  $k_1 \cot(k_1 a/2) = -k_2, B = 0, (D + C) = 0$

dan (3), (5.a) dan (6.a) menjadi :

$$(19) \quad \psi(x) = \begin{cases} -A \sin(k_1 a/2) e^{(k_2 a/2)} e^{(k_2 x)}, & x \leq -a/2 \\ A \sin(k_1 x), & -a/2 \leq x \leq a/2 \\ A \sin(k_1 a/2) e^{(k_2 a/2)} e^{-(k_2 x)}, & x \geq a/2 \end{cases}$$



Gambar 2

Tampak dari (18) bahwa  $\psi_M$  adalah fungsi genap (yakni kosinus), dan dari (19) bahwa  $\psi_M$  adalah fungsi gasal (yakni sinus). Gambar 2 memperlihatkan eigenfungsi-eigenfungsi itu.

### 3. EIGENTENAGA

Dari syarat untuk Kategori 1, yakni persamaan (16) dengan memakai  $k_1$  dan  $k_2$  berturut-turut dari (4) dan (7) kita peroleh:

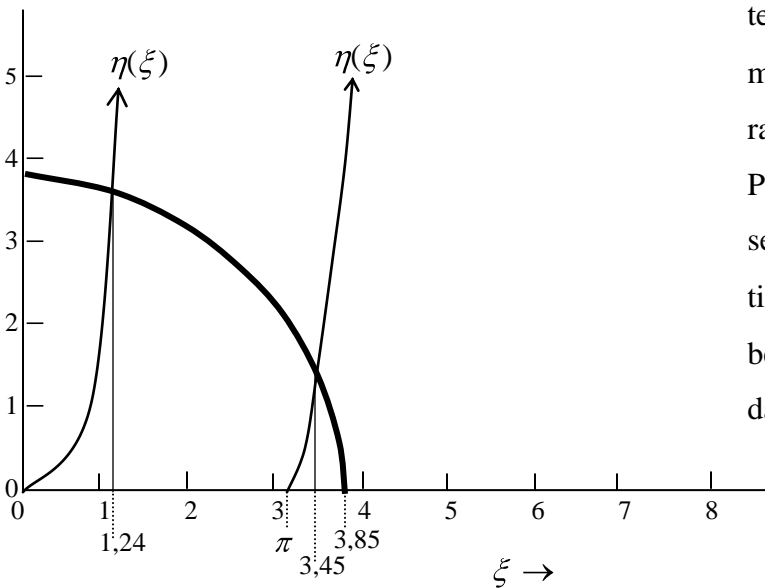
$$\sqrt{m(U_o - E)a^2 / \hbar^2} = \sqrt{mE a^2 / 2\hbar^2} \tan \sqrt{mE a^2 / 2\hbar^2}$$

Kalau  $\sqrt{mU_o a^2 / \hbar^2} = R, \quad \sqrt{mE a^2 / \hbar^2} = \xi$

dan ruas kiri dan ruas kanan kita namakan  $\eta(\xi)$ , maka:

$$(16.a) \quad \eta(\xi) = \sqrt{R^2 - \xi^2} = \xi \tan \xi$$

Ruas kiri dan tengah dari (16.a) dapat ditulis sebagai  $\xi^2 + \eta^2 = R^2$  yang — karena  $\xi > 0$  dan  $\eta > 0$  — grafik ( $\eta$  versus  $\xi$ )-nya berupa seperempat lingkaran di kuadran-1, dengan pusat di titik asal  $O$  dan ruji (*radius*)  $R$ . Ruas kiri dan kanan dari (16.a) ialah fungsi  $\eta = \xi \tan \xi$  yang grafiknya nol di  $\xi = 0$  dan di  $\pi (=3,14)$  rad, dan naik, mula- mula landai



tetapi lalu makin terjal, secara asimtotis menghampiri sumbu  $x = \pi/2 (= 1,57$  rad) dan sumbu  $x = 3\pi/2 (= 4,71$  rad). Perpotongannya dengan kurve seperempat lingkaran tadi memberikan titik-titik dengan absisa  $\xi_1$  dan  $\xi_3$  yang bersangkutan dengan eigen tenaga  $E_1$  dan  $E_3$ . (Lihat Gambar.3).

Gambar 3

Dari  $\xi = \sqrt{mE a^2 / 2\hbar^2} \rightarrow E = (2\hbar^2 / ma^2) \xi^2$ , atau

$E = (4/\pi^2)(\pi^2 \hbar^2 / 2ma^2) \xi_1^2 = (4/\pi^2) E_\infty \xi^2$  yang untuk  $U_o = 6E_\infty$ , memberikan  $E = (4/\pi^2) (U_o/6) \xi^2$ . Gb.3 memberikan  $\xi_1 = 1,24$  dan  $\xi_3 = 3,55$ , sehingga  $E_1 = 0,104 U_o$  dan  $E_3 = 0,848 U_o$

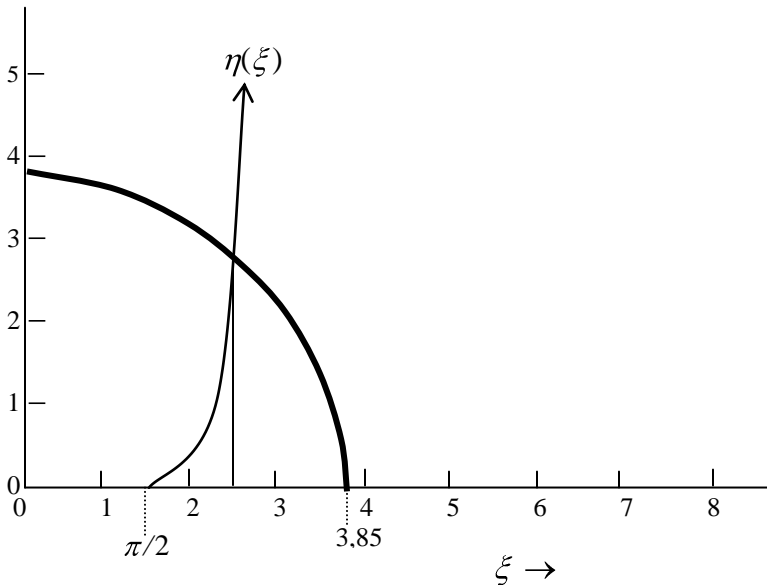
Dari syarat untuk Kategori 2, yakni persamaan (17), diperoleh :

$$-\sqrt{m(U_0 - E)a^2 / \hbar^2} = \sqrt{mEa^2 / \hbar^2} \cot \sqrt{mEa^2 / \hbar^2}$$

atau

$$(17.a) \quad \eta(\xi) = \sqrt{R^2 - \xi^2} = -\xi \cot \xi .$$

Ruas kiri dan kanan persamaan ini ialah  $\eta = \xi \cot \xi$  yang grafiknya nol di  $\pi/2 (=1,57)$  rad, dan naik, mula-mula landai tetapi lalu terjal, menghampiri sumbu  $x = \pi (= 3,14)$  rad secara asimtotis. Perpotongannya dengan kurve seperempat lingkaran di kuadran 1 yang diberikan oleh ruas kiri dan tengah persamaan (17.a) ialah titik dengan absisa  $\xi_2$  yang bersangkutan dengan eigentena  $E_2$  (lihat Gambar 4).



Dari Gambar 4 diperoleh  $\xi_2 = 2,45$ , sehingga eigentenanya ,  $E_2 = 0,405 U_0$ . Dalam Gambar3 dan Gambar 4 :

Gambar 4

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{mU_0 a^2 / 2\hbar^2} , \text{ yang untuk } U_0 = 6 E_\infty \\ &= \sqrt{m(6E_\infty) a^2 / 2\hbar^2} = \sqrt{6(ma^2 / 2\hbar^2)(\pi^2 \hbar^2 / 2ma^2)} \\ &= \sqrt{6\pi^2 / 4} = (\pi/2)\sqrt{6} \approx 3,85 . \end{aligned}$$

$E_1$ ,  $E_2$  dan  $E_3$  inilah, bersama dengan  $E_\infty$ , yang ditunjukkan dengan bagan aras tenaga (*energy level diagram*) di Gb.1, dengan tenaga  $E$  yang dinyatakan dalam  $E_\infty$  sebagai ordinat.

#### 4. WASANAKATA

Seperti disebutkan dalam Y & F (p.1384), salah satu terapan model potensial sumur persegi ini ialah bintik catu (*quantum dots*), yakni zarah-zarah berukuran nanometer dan bahan semipenghantar, seperti kadmium-selenida (*CdSe*). Bila bintik-bintik catu disinari dengan foton ultraungu, elektron-elektronnya menyerap tenaga foton itu dan terteral (*excited*) ke aras-aras tenaga yang tinggi, misalnya aras ketiga. Kemudian elektron itu kembali ke aras tenaga dasar secara beriam (*cascading*), ke aras ke dua dulu, lalu dari sana ke aras pertama. Salah satu langkah itu dibarengi dengan dipancarkannya foton cahaya kasatmata, yang disebut pendaran-fluor (*fluorescence*). Bintik-bintik catu dapat disuntikkan ke jaringan hidup dan pendaran-fluornya dipakai sebagai perunut (*tracers*) untuk penelitian biologi dan biomedis. Bintik catu dapat menjadi kunci perancangan laser dan komputer ultracepat generasi baru.

Pernah ada usulan untuk RUTI (Riset Unggulan Terpadu Internasional) untuk merancang dan memproduksi bintik-bintik catu guna memetakan agihan suhu di bagian-bagian tubuh tertentu, dalam pendeteksian tumor di bidang Onkologi.

---

#### ACUAN

1. Eisberg, Robert M. : **Fundamentals of Modern Physics**, John Wiley & Sons, New York, 1961, p.239 – 45
2. Young, Hugh D. & Roger A. Freedman : **Sears and Zemansky's University Physics** (12<sup>th</sup> ed.) Addison-Wesley, San Francisco, 2008, p.1382 – 4