ASAS KETAKPASTIAN HEISENBERG : KEPANGGAHANNYA DENGAN PENGGETAR SELARAS RATAH

Liek Wilardjo

Program Studi Teknik Elektro, Fakultas Teknik – UKSW
Jalan Diponegoro 52-60, Salatiga 50711

INTISARI

Ditunjukkan bahwa eigennilai Hamiltonan Penggetar Selaras Linear (*Linear Harmonic Oscillator*) ialah $E_n = (n + \frac{1}{2})\mathbf{h}w$, dengan tenaga keadaan dasarnya, $E_o = \frac{1}{2}\mathbf{h}w$, yang dapat juga diperoleh dengan menerapkan asas ketakpastian Heisenberg.

1. PENGANTAR

Dalam Mikroelektronika dipakai untai terangkun yang disebut *IC* (*integrated circuit*). Untai terangkun itu berupa cebis renik (*microchip*) yang disusun dari gerbang-gerbang logika dengan arsitektur tertentu, sehingga sistem itu dapat melakukan fungsi yang sesuai dengan rancangannya. Dalam rangkunan berskala sangat besar (VLSI), cebis berukuran satu inci persegi dapat memuat ratusan ribu gerbang. Komponen utama dari gerbang itu berupa peranti (*device*) yang disebut transistor efek medan semipenghantar-oksida logam (TEMSOL) atau *MOSFET* (*Metal-Oxide Semiconductor Field Effect Transistor*). Berfungsinya TEMSOL ditentukan oleh sifat-sifat bahan-bahan penyusunnya dan perlakuan yang dikenakan pada bahan-bahan itu. Ini semua ditelaah dalam Fisika yang didasarkan pada Mekanika Kuantum.

2. ASAS KETAKPASTIAN

Salah satu asas yang paling penting dalam Mekanika Kuantum ialah Asas Ketakpastian. Asas ini menyatakan bahwa pasangan amatan sekawan (*conjugate observables*) tidak dapat kedua-duanya ditentukan dengan pasti. Pasangan amatan, misalnya **P** dan **Q**, disebut sekawan kalau komutatornya memenuhi persamaan

$$[\mathbf{P}_i . \mathbf{Q}_j] = -i\,\mathbf{h}\,d_{ij}\,\mathbf{I} \quad \text{............} \qquad (1)$$

Komutator dari pengandar-pengandar **P** dan **Q**, yakni [**P**, **Q**] = **PQ** – **QP**, dapat ditentukan dengan memakai representasi Schroedinger, dengan $\mathbf{P} = -i\mathbf{h}\frac{\partial}{\partial Q}$ dan **Q** = Q :

$$\begin{aligned}
[\mathbf{P}, \mathbf{Q}]y &= \mathbf{PQ}y - \mathbf{QP}y \\
&= -ih\frac{\partial}{\partial Q}(Qy) - Q(-i\mathbf{h}\frac{\partial y}{\partial Q}) \\
&= -ih(y + Q\frac{\partial y}{\partial Q}) + i\mathbf{h}Q\frac{\partial y}{\partial Q}) \\
&= -i\,\mathbf{h}y = -i\,\mathbf{h}\,\mathrm{I}y\ .
\end{aligned}$$

Jadi, [**P**, **Q**] = $-i$ **h I** atau lebih jelas lagi,

$$[\mathbf{P}_k\ , \mathbf{Q}_l] = -\,i\ d_{kl}\ \mathbf{I}\ .$$

Dapat juga komutator itu diperoleh dari kurung Poissonnya, *via* Asas Kebersesuaian (*Correspondence Principle*) Bohr.

Secara matematis, Asas Ketakpastian ditulis

$$\Delta p \cdot \Delta q \geq \tfrac{1}{2}\mathbf{h} \quad \text{............} \qquad (2)$$

Dalam (2), $\Delta\, p$ dan $\Delta\, q$ berturut-turut ialah ketakpastian hasil pengukuran pusa (*momentum*) *p*, dan ketakpastian hasil pengukuran kedudukan (posisi) *q*. Kalau *p* diketahui dengan pasti, berarti ketakpastiannya $\Delta\, p = 0$, maka menurut (2) $\Delta\, q = \infty$, artinya posisi zarah yang pusanya diketahui dengan pasti itu bisa di mana saja; dengan kata lain, sama sekali tidak dapat ditentukan.

Asas Ketakpastian ditemukan oleh Werner Heisenberg. Albert Einstein, yang meyakini bahwa Fisika itu deterministik, menentang Mekanika Kuantum. Pernyataannya yang terkenal ialah: "Tuhan tidak main dadu." Sebaliknya, Niels Bohr yakin benar bahwa Fisika itu indeterministik, apa lagi di dunia renik (*in the microworld*). Konon Bohr menjawab Einstein dengan mengatakan: "Tuhan memang tidak main dadu, tetapi kadang-kadang Ia melemparkan dadu ke arah yang tidak kita ketahui." Dalam debat antara kubu Einstein dan kubu Bohr, akhirnya diputuskan bahwa yang menang ialah kubu Bohr. Einstein mengakui bahwa kubu lawannya itu memang lebih panggah (konsisten). Ia mengaku kalah dalam sebuah pertempuran, tetapi "perang belum usai". "Perang" itu sampai sekarang masih berkecamuk, dengan Roger Penrose sebagai "jendral"nya kubu Einstein dan Stephen Hawking sebagai "komandan"nya kubu Bohr.

Meskipun berseberangan paham dengan ilmuwan-ilmuwan di kubu Mekanika Kuantum, Einstein jugalah yang bersama dengan Bohr mengusulkan Heisenberg dan Erwin Schroedinger (yang juga perintis Mekanika Kuantum) sehingga mereka mendapat hadiah Nobel. Padahal sejak masih menjadi guru besar di Universitas Jerman di Praha, Einstein sinis sekali terhadap para fisikawan yang meng*ugemi* Mekanika Kuantum.

Seperti **P** dan **Q**, amatan atau pengandar (*operator*) tenaga total, yakni Hamiltonan **H**, dan pengandar waktu **T** juga merupakan pasangan yang sekawan:

$$\left[\mathbf{H}_k \mathbf{T}_{\mathbf{l}}\right] = -i\mathbf{h}d_{k\mathbf{l}}\,\mathbf{I} \quad \text{............} \qquad (3)$$

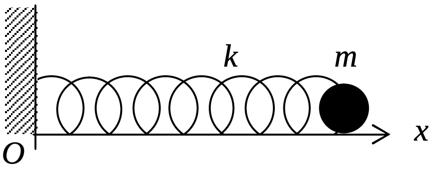
sehingga, menurut asas ketakpastian Heisenberg,

$$\Delta E.\Delta t \geq \frac{1}{2}\mathbf{h} \quad \text{............} \qquad (4)$$

Asas Ketakpastian Heisenberg dapat diturunkan dengan memakai komutator dan sifat-sifat serta hubungan antar pengandar-pengandar Hermite-an. Penurunan atau pembuktiannya secara matematis ada di semua buku Mekanika Kuantum, seperti bukunya Merzbacher, bukunya Newing dan Cunningham, bukunya Messiah, dsb. Powel dan Craseman (1961) membuktikannya dengan memakai representasi Schroedinger. Di sini hanya akan ditunjukkan bahwa penggunaan asas itu dalam

Penggetar Selaras Linear memberikan tenaga keadaan dasar (*ground state energy*) yang sama dengan yang diperoleh dengan menyelesaikan persamaan Schroedinger. Cara untuk meyakinkan kebenaran asas ketakpastian Heisenberg ini sesuai untuk diberikan kepada pemula dalam Mekanika Kuantum, yakni para mahasiswa semester kedua dalam program S_1, sebab mereka sudah cukup akrab dengan penggarapan soal penggetar selaras linear secara klasik. Pemanfaatan keakraban dengan Fisika Klasik, khususnya tentang gelombang tegak (*standing wave*) juga dipakai untuk mendapatkan aras-aras tenaga (*energy levels*) atom Hidrogen, tanpa harus menerima postulat Bohr tentang pencatuan (kuantisasi) pusa sudut (*angular momentum*)nya, yang dalam teori Bohr itu terasa sebagai ketentuan yang ditambahkan secara *ad hoc* (Wilardjo, 2001).

3. PENGGETAR SELARAS LINEAR



Sistem berupa pegas yang tetapan kekakuan (*stiffness constant*)nya k dan pangkalnya tertambat (*fixed*) di posisi x = 0, sedang di ujungnya yang bebas terdapat massa m, dapat bergetar pada arah $\pm x$. Kalau pengaruh gesekan diabaikan, getarannya selaras. Sistem semacam itulah yang disebut penggetar selaras linear.

Menurut hukum Newton II,

$$F = m\ddot{x} \quad \text{............} \qquad (5)$$

dan menurut hukum Hooke

$$F = -kx \quad \text{............} \qquad (6)$$

Maka $\qquad -kx = m\ddot{x}$, atau

$$\ddot{x} + (k/m)\,x = 0 \quad \text{............} \qquad (7)$$

Penyelesaian persamaan diferensial (7) ialah

$$x \propto \exp(\pm iwt),$$

yang dapat kita tulis:

$$x = A\sin wt \quad \text{............} \qquad (8)$$

dengan $w = \sqrt{k/m}$ .... (9)

Tenaga gerak sistem ini ialah

$$K = \tfrac{1}{2} m\dot{x}^2 = p^2 / 2m \quad \text{...........} \quad (10)$$

sedang tenaga potensialnya

$$V = \tfrac{1}{2} kx^2$$

yang dengan (9) menjadi

$$V = \tfrac{1}{2} mw^2 x^2 \quad \text{...........} \quad (11)$$

sehingga tenaga totalnya

$$E = p^2 / 2m + \tfrac{1}{2} mw^2 x^2 \quad \text{...........} \quad (12)$$

Tenaga total atau Hamiltonan klasik ini diungkapkan dalam Mekanika Kuantum sebagai pengandar Hamilton:

$$\mathbf{H} = \mathbf{P}^2 / 2m + \tfrac{1}{2} mw^2 \mathbf{X}^2 \quad \text{...........} \quad (13)$$

Eigennilai **H** tidak negatif, sebab dalam suatu eigenkeadaan y_n

$$E_n = \langle \mathrm{H} \rangle = \tfrac{1}{2m} \langle \mathbf{P}^2 \rangle + \tfrac{1}{2} mw^2 \langle \mathbf{X}^2 \rangle \geq 0$$

Kalau E_n ialah eigennilai **H**, maka demikian pula $E_n \pm \mathbf{h}w$, asalkan $E_n - \mathbf{h}\, w \geq 0$. Berikut ini bakatnya:

$$[\mathbf{H}, \mathbf{P}] = \tfrac{1}{2m} [\mathbf{P}^2, \mathbf{P}] + \tfrac{1}{2} mw^2 [\mathbf{X}^2, \mathbf{P}]$$

$$= 0 + \tfrac{1}{2} mw^2 (\mathbf{X}^2\mathbf{P} - \mathbf{XPX} + \mathbf{XPX} - \mathbf{PX}^2)$$

$$= \tfrac{1}{2} mw^2 (\mathbf{X}^2\mathbf{P} - \mathbf{XPX} + \mathbf{XPX} - \mathbf{PX}^2)$$

$$= \tfrac{1}{2} mw^2 (\mathbf{X}[\mathbf{X}, \mathbf{P}] + [\mathbf{X}, \mathbf{P}]\mathbf{X})$$

$$= \tfrac{1}{2} mw^2 \cdot 2\mathbf{X}[\mathbf{X}, \mathbf{P}]$$

yang dengan (1) menjadi $mw^2 . i\mathbf{h}\mathbf{X}$.

Jadi,

$$[\mathbf{H}, \mathbf{P}] = i\mathbf{h}mw^2\mathbf{X}.$$

Dengan cara yang sama dan memakai (1) lagi, kita dapatkan:

$$[\mathbf{H}, \mathbf{X}] = -(i\mathbf{h}/m)\mathbf{P}.$$

Maka,

$$\begin{aligned}[\mathbf{H}, \mathbf{P} \pm imw\mathbf{X}] &= [\mathbf{H}, \mathbf{P}] \pm imw[\mathbf{H}, \mathbf{X}] \\ &= i\mathbf{h}mw^2\mathbf{X} \pm imw\,(-i\mathbf{h}/m)\mathbf{P} \\ &= i\mathbf{h}mw^2\mathbf{X} \pm \mathbf{h}w\,\mathbf{P} \\ &= \pm\,\mathbf{h}w\,(\mathbf{P} \pm imw\,\mathbf{X}) \quad .... \qquad (14)\end{aligned}$$

Karena $[\mathbf{H}, \mathbf{P} \pm imw\mathbf{X}] = \mathbf{H}\,(\mathbf{P} \pm imw\mathbf{X}) - (\mathbf{P} \pm imw\;\mathbf{X})\mathbf{H}$,

maka
$$\begin{aligned}\mathbf{H}\,(\mathbf{P} \pm imw\mathbf{X})\mathrm{y}_n &= \pm\,\mathbf{h}w\,(\mathbf{P} \pm imw\;\mathbf{X}]\;\mathrm{y}_n + (\mathbf{P} \pm imw\mathbf{X})\mathbf{H}\mathrm{y}_n\,, \\ &= \pm\,\mathbf{h}w\,(\mathbf{P} \pm imw\;\mathbf{X}]\;\mathrm{y}_n + (\mathbf{P} \pm imw\mathbf{X})E_n\mathrm{y}_n\,, \\ &= (E_n \pm \mathbf{h}w)\,(\mathbf{P} \pm imw\,\mathbf{X})\;\mathrm{y}_n\,.\end{aligned}$$

Jadi, $$\mathbf{H}(\,\mathbf{P} \pm imw\mathbf{X})\mathrm{y}_n = (E_n \pm \mathbf{h}w)\,(\mathbf{P} \pm imw\,\mathbf{X})\;\mathrm{y}_n\,. \quad .... \qquad (15)$$

Persamaan (15) menunjukkan bahwa $(\,\mathbf{P} \pm imw\mathbf{X})\mathrm{y}_n$ adalah eigenkeadaan dari pengandar **H** yang bersangkutan dengan eigennilai ($E_n \pm \mathbf{h}w$). Maka $E_n = E_0 + n\mathbf{h}w$; di sini E_0 ialah nilai tenaga yang paling rendah, yakni tenaga keadaan dasar, dan n ialah sebuah bilat (bilangan bulat) positif.

Kita tinjau sekarang

$$\mathbf{H}(\,\mathbf{P} - imw\mathbf{X})\mathrm{y}_0 = (E_0 \pm \mathbf{h}w)\,(\mathbf{P} - imw\,\mathbf{X})\;\mathrm{y}_0$$

$(\mathbf{P} - imw\,\mathbf{X})\;\mathrm{y}_0$ mustahil merupakan eigenkeadaan tenaga yang terendah. Karena itu, persamaan di atas hanya dipenuhi kalau $(\mathbf{P} - imw\,\mathbf{X})\;\mathrm{y}_0 = 0$.

Maka $(\mathbf{P} + imw\,\mathbf{X})\,(\mathbf{P} - imw\,\mathbf{X})\;\mathrm{y}_0 = 0$

$$(\mathbf{P}^2 + imw\,\mathbf{X}\mathbf{P} - imw\,\mathbf{P}\mathbf{X} + m^2w^2\mathbf{X}^2)\;\mathrm{y}_0 = 0$$

$$(\mathbf{P}^2 + imw\,[\mathbf{X}, \mathbf{P}] + m^2w^2\,\mathbf{X}^2)\;\mathrm{y}_0 = 0$$

$$(2m\,(\mathbf{P}^2\,/\,2m + \imath mw^2\,\mathbf{X}^2) + imw\,[\mathbf{X}, \mathbf{P}]\,)\;\mathrm{y}_0 = 0$$

$$[2m\mathbf{H} + imw\,(i\mathbf{hI})]\ y_0 = 0$$

$$(2m\mathbf{H} - m\mathbf{h}w\mathbf{I})\ y_0 = 0$$

$$(2\mathbf{H} - \mathbf{h}w\mathbf{I})\ y_0 = 0$$

$$2\mathbf{H}y_0 = \mathbf{h}w\mathbf{I}\,y_0 = \mathbf{h}w\,y_0\,,$$

sehingga

$$\mathbf{H}y_0 = \frac{1}{2}\mathbf{h}w\,y_0 = E_0 y_0$$

Karena $E_n = E_0 + n\mathbf{h}w$, maka

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\mathbf{h}w \quad .... \qquad (16)$$

dengan $n = 0, 1, 2, ...$

Persamaan (16) memberikan eigennilai-eigennilai dari pengandar Hamilton yang bersangkutan dengan eigenkeadaan-eigenkeadaan penggetar selaras linear. Dengan kata lain, E_n ialah aras tenaga ke-n dari penggetar selaras linear, sedang $E_0 = \frac{1}{2}\mathbf{h}w$ ialah aras tenaganya yang paling rendah, yang juga disebut tenaga keadaan dasar.

4. KEPANGGAHAN DENGAN ASAS KETAKPASTIAN

Bahwa tenaga keadaan dasar itu $\frac{1}{2}\mathbf{h}w$, dan bukan 0, panggah (konsisten) dengan asas ketakpastian Heisenberg, sebab kalau nol, maka pusanya juga nol, berarti tidak bergerak, alias posisinya tertentu dan tidak berubah-ubah. Tetapi kalau pusa dan posisinya (kedua-keduanya) pasti, ini melanggar asas ketakpastian Heisenberg. Dengan argumen "*reductio ad absurdum*" ini sudah kita tunjukkan bahwa persamaan (16) konsisten dengan persamaan (2).

Untuk lebih meyakinkan kepanggahan ini, akan ditunjukkan bahwa tenaga keadaan dasar $E_o = \frac{1}{2}\mathbf{h}w$ itu dapat diperoleh dengan menerapkan asas ketakpastian (2).

Untuk penggetar selaras linear klasik persamaan (8) memberikan posisi di saat *t*, yakni

$$x = A \sin wt .$$

Maka $x^2 = A^2 \sin^2 wt$, dan rerata waktunya :

$$\langle x^2 \rangle = A^2 \left(\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 wt\, dt \right)$$

$$= A^2 \left(\frac{1}{T} \int_0^T \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2wt)\, dt \right)$$

$$= A^2 \big/ 2T \left[t - \frac{1}{2w} \sin 2wt \right]_0^T$$

$$= A^2 \big/ 2T\, (T - 0)$$

$$= \tfrac{1}{2} A^2$$

Dari (8) diperoleh $\dot{x} = Aw \cos wt$, sehingga $p = m\dot{x} = mAw \cos wt$ dan $p^2 = m^2 A^2 w^2 \cos^2 wt$,

$$\langle p^2 \rangle = m^2 A^2 w^2 \left(\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 wt dt \right)$$

$$\tfrac{1}{2} m^2 A^2 w^2 .$$

Tenaga total = tenaga gerak + tenaga potensial. Di saat simpangan penggetar itu maksimum (x_m = A), tenaga geraknya nol, sehingga tenaga total = tenaga potensial maksimum = $\tfrac{1}{2} mw^2 A^2$. Jadi $E = \tfrac{1}{2} mw^2 A^2$.

Bila dinyatakan dengan *E* ini, kita dapatkan bahwa

$$\langle x^2 \rangle = E \big/ mw^2$$

dan $\langle p^2 \rangle = E m$, sehingga

$$\langle x^2 \rangle \langle p^2 \rangle = \left(E / mw^2 \right)(E\,m) = \left(E^2 / w^2 \right)$$

Untuk getaran kecil, ruas kiri dapat ditafsirkan sebagai $(\Delta x)^2$ $(\Delta p)^2$. Maka

$$\Delta x \cdot \Delta p = \sqrt{E^2 / w^2} = E/w$$

Tetapi menurut Heisenberg,

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{1}{2} \mathbf{h} \ ,$$

berarti nilainya paling rendah (untuk keadaan dasar, E_o)

$$\Delta x \cdot \Delta p = \frac{1}{2} \mathbf{h} = E_0 / w \ .$$

Dari sini kita dapatkan :

$$E_0 = \frac{1}{2} \mathbf{h} w$$

(*Q.E.D ; quod erat demonstrandum*)

5. SIMPULAN

Asas ketakpastian Heisenberg dijelaskan artinya tetapi hanya diberikan ungkapan matematisnya, tanpa penurunan. Dengan menggunakan pengandar pusa **P**, pengandar posisi **X**, dan pengandar Hamilton **H** serta hubungan mereka, diperoleh aras-aras tenaga penggetar selaras linear, termasuk aras tenaganya yang paling rendah, yakni tenaga keadaan dasar, $E_0 = \frac{1}{2} \mathbf{h} w$. Kemudian ditunjukkan kepanggahan antara asas ketidakpastian Heisenberg dan aras-aras tenaga penggetar selaras linear, dengan mendapatkan tenaga keadaan dasarnya dengan menerapkan asas Heisenberg pada penggetar selaras linear klasik.

ACUAN

1. Powell, John L. & Bernd Craseman:**Quantum Mechanics**, Addison-Wesley, Reading (Mass.), 1961, p.72-73
2. Wilardjo, L.: "**Using Standing-Wave Pattern to Explain Quantization**", *Proc. 1st Kentingan Physics Forum*, July 23rd – 24th, 2001
3. Young, Hugh D. & Robert A. Freedman: **University Physics**, 12th ed., Addison-Wesley, San Francisco, 2007, Chapters 40 & 41